Početní část 2 - 1.2.2021

3. Volíme substituci $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, kterou integrál převedeme a upravíme na

$$J(y) = \int \frac{1}{\frac{2y}{1+y^2} + 2} \cdot \frac{2}{1+y^2} dy = \int \frac{dy}{y^2 + y + 1}.$$

Jmenovatel je nerozložitelný, takže rovnou převedeme na arcustangens:

$$J(y) = \int \frac{dy}{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} dy}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Po dosazení

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}\right),$$

tato funkce je definovaná na intervalech $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, ale integrand na celém $\mathbb{R}$, proto musíme „lepit“. Spočteme snadno

$$\lim_{x \to \pi-} I(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad \lim_{x \to \pi+} I(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

a stejně v každém bodě tvaru $(2k+1)\pi$, díky periodicitě funkce $I(x)$. V každém takovém bodě je tedy „skok“ $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ a definujeme

$$F(x) = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}} \quad \text{pro } x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$$

$$F(x) = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}} \quad \text{pro } x = (2k+1)\pi$$

což je hledaná primitivní funkce na celém $\mathbb{R}$.

4. (a) Využijeme známý T.p.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

položíme

$$\arcsin y = y + by^3 + cy^5 + o(y^5)$$

a ze vztahu

$$x = \arcsin(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + b(x - \frac{x^3}{6})^3 + cx^5 + o(x^5)$$

dopočteme porovnáním koeficientů $b = \frac{1}{6}, c = \frac{3}{40}$, tedy

$$\arcsin x = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}} + o(x^5).$$

(b) Dále do T.p.

$$\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$$

dosadíme předchozí T.p., takže po několika snadných úpravách dostáváme

$$\log(1 + \sin x) = \boxed{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}} + o(x^3),$$

$$\log(1 + \arcsin x) = \boxed{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}} + o(x^3).$$

(c) Proto je

$$\log(1 + \sin x) - \log(1 + \arcsin x) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

a tedy

$$\boxed{\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1 + \sin x) - \log(1 + \arcsin x)}{x^n} = \begin{cases} 0 & (n \leq 2) \\ -\frac{1}{3} & (n = 3) \\ -\infty & (n \geq 4) \end{cases}}$$